

Програма підготовки бакалаврів у галузі знань 13 – "Механічна інженерія "
зі спеціальності 131 –" Прикладна механіка "

"Вища математика"

450 год. / 15 кредитів ЕКТС
(90 год. лекцій, 90 год. практичних занять)

Завдання для поточного та підсумкового контролю

Типові розрахунки

I семестр

Типовий розрахунок №1 (складається з 4 –х завдань, розрахований на 6 годин)

Завдання 1. Встановити, що система трьох лінійних алгебраїчних рівнянь має єдиний розв'язок та знайти його:

- а) матричним методом;
- б) за формулами Крамера;
- в) за методом Гаусса.

Завдання 2. Побудувати лінію за її полярним рівнянням, записати її рівняння в декартових координатах.

Завдання 3. Звести рівняння ліній другого порядку до канонічних, знайти їх параметри та побудувати ці лінії.

Завдання 4. Дослідити задані функції на неперервність, встановити тип розриву, якщо він існує, зобразити графіки функцій (схематично навколо точок розриву).

II семестр

Типовий розрахунок №2 (складається з 5 завдань, розрахований на 7 годин)

Завдання 1. Обчислити площу фігури, заданої у декартових координатах.

Завдання 2. Обчислити площу фігури (довжину дуги), заданої у полярних координатах або параметрично.

Завдання 3. Обчислити об'єм тіла за площами паралельних перерізів.

Завдання 4. Обчислити об'єм тіла обертання.

Завдання 5. Задача фізики (механіки) на застосування визначеного інтеграла.

III семестр

Типовий розрахунок №3 (складається з 4-х завдань, розрахований на 6 годин)

Завдання 1. Обчислити об'єм тіла за допомогою подвійного або потрійного інтеграла.

Завдання 2. Задача механіки на застосування кратних інтегралів.

Завдання 3. Обчислити криволінійний інтеграл.

Завдання 4. Задача механіки (фізики) на застосування кратних інтегралів.

Питання для модульного контролю

I семестр

Елементи лінійної алгебри

1. Матриці, їх види. Дії з матрицями.
2. Визначник матриці, його властивості, обчислення.
3. Обернена матриця. Необхідна і достатня умова існування оберненої матриці.
4. Система n лінійних алгебраїчних рівнянь з n невідомими, її матричний запис та розв'язок.
5. Формули Крамера.
6. Розв'язування однорідних систем лінійних рівнянь.

Елементи векторної алгебри

1. Вектори. Лінійні операції над векторами та їх властивості.
2. Базис на площині і у просторі. Розклад вектора за базисом.
3. Проекція вектора на вісь. Властивості проєкцій.
4. Ортогональний базис. Вектор в декартовій системі координат.
5. Проекції вектора, заданого координатами його початку і кінця. Модуль вектора. Відстань між двома точками на площині і у просторі.
6. Напрямні косинуси вектора. Орт вектора.
7. Скалярний добуток векторів, його властивості, вираз в координатах.
8. Кут між двома векторами. Умова перпендикулярності у векторній та координатній формах.
9. Векторний добуток, його властивості, вираз в координатах.
10. Мішаний добуток векторів, його властивості, вираз в координатах.
11. Умова компланарності трьох векторів у векторній та координатній формах.
12. Застосування векторів до розв'язання задач аналітичної геометрії:
 - ділення відрізка у заданому відношенні;
 - площа трикутника за координатами його вершин;
 - об'єм піраміди за координатами її вершин;

-формули перетворення координат при паралельному переносі та повороті осей координат.

Аналітична геометрія

- 1.Лінії та їх рівняння на площині. Приклади
- 2.Полярна система координат. Полярне рівняння лінії. Приклади.
- 3.Параметричне рівняння лінії. Приклади.
- 4.Пряма на площині. Різні види її рівняння (за точкою і нормальним вектором; загальне рівняння; рівняння з кутовим коефіцієнтом; за точкою і кутовим коефіцієнтом; рівняння “у відрізках”; за двома точками)
- 5.Кут між прямими на площині. Умови паралельності і перпендикулярності.
- 6.Відстань від точки до прямої на площині.
- 7.Криві другого порядку – еліпс, гіпербола, парабола. Їх канонічні рівняння і властивості.
- 8.Лінійне рівняння в просторі. Загальне рівняння площини. Неповні рівняння.
- 9.Рівняння площини за точкою і нормальним вектором.
- 10.Кут між двома площинами. Умови паралельності і перпендикулярності площин.
11. Пряма у просторі. Канонічні та параметричні рівняння.
- 12.Пряма як перетин двох площин. Перехід від загальних рівнянь до канонічних.
- 13.Кут між двома прямими у просторі. Умова перетину двох прямих.
- 14.Поверхні другого порядку, їх канонічні рівняння та дослідження форми методом перерізів:
 - еліпсоїд;
 - гіперболоїди (однопорожнинний і двопорожнинний);
 - параболоїди (еліптичний і гіперболічний);
 - конус другого порядку;
 - циліндри другого порядку.

Вступ до математичного аналізу

1. Означення функції. Область визначення. Способи задання функцій. Графік функції.
2. Графіки основних елементарних функцій (вміти будувати).
3. Нескінченно малі величини. Означення. Приклади. Характер графіка нескінченно малої функції при $x \rightarrow x_0$, $x \rightarrow \infty$.
4. Нескінченно велика величина. Означення, приклади. Характер графіка н.в. функції при $x \rightarrow x_0$.
5. Обмежена функція в заданому інтервалі. Приклади. Геометрична ілюстрація.
6. Властивості нескінченно малих.
7. Границя функції при $x \rightarrow x_0$ та $x \rightarrow \infty$. Означення. Геометричне тлумачення.
8. Границя послідовності. Означення. Геометричне тлумачення.
9. Властивості границь (границя сталої; про знак границі; границя проміжної функції; границя суми, добутку, частки).
10. Перша важлива границя.
11. Друга важлива границя. Різні види її.

12. Порівняння нескінченно малих. Еквівалентні нескінченно малі та їх властивості. Навести приклади еквівалентних нескінченно малих.
13. Неперервність функції в точці (два означення).
14. Точки розриву функції. Типи точок розриву. Навести приклади.
15. Дії над неперервними функціями (неперервність суми, добутку та частки; неперервність складеної функції).
16. Властивості функцій, неперервних на відрізку (сформулювати та дати геометричне тлумачення теорем)

Похідна та диференціал функції

1. Похідна функції. Означення. Геометричний та фізичний зміст похідної.
2. Зв'язок між неперервністю та диференційовністю функції (довести).
3. Похідна сталої, суми, добутку, частки (довести).
4. Похідні тригонометричних функцій $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ (вивести).
5. Похідна логарифмічної функції (вивести).
6. Похідна показникової функції (вивести).
7. Похідні обернених тригонометричних функцій $\arccos x$, $\arcsin x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$ (вивести).
8. Похідна складеної функції. Похідна степеневі функції (вивести).
9. Похідна функції, заданої параметрично.
10. Диференціал функції та його зв'язок з приростом функції. Геометричний зміст диференціала.
11. Властивості диференціала.
12. Застосування диференціала в наближених обчисленнях.
13. Похідні та диференціали вищих порядків. Механічний зміст другої похідної.

II семестр

Застосування похідної.

1. Похідна. Геометричний та фізичний зміст похідної.
2. Диференціал функції.
3. Застосування диференціала у наближених обчисленнях.
4. Теорема Ролля (формулювання та геометричне тлумачення).
5. Теорема Лагранжа, наслідки з неї.
6. Правило Лопіталю.
7. Ознаки монотонності функції.
8. Необхідна ознака екстремуму.
9. Достатні умови екстремуму (за першою та другою похідною).
10. Опуклість графіка функції. Достатні умови. Точки перегину.
11. Асимптоти графіка функції.

Невизначений інтеграл

1. Поняття первісної та невизначеного інтеграла.
2. Властивості невизначеного інтеграла.
3. Таблиця основних інтегралів.

- 4.Інтегрування частинами. Приклади.
- 5.Заміна змінної в невизначеному інтегралі (метод підстановки). Навести приклади.
- 6.Інтегрування елементарних раціональних дробів I-III типів. Приклади.
- 7.Розкладання дроби на елементарні раціональні дроби.
- 8.Загальне правило інтегрування раціональних функцій.
- 9.Інтегрування тригонометричних функцій (інтеграл виду $\int R(\sin x, \cos x)dx$).
Універсальна тригонометрична підстановка.
- 10.Інтегрування тригонометричних функцій за допомогою підстановок $t=\sin x$, $t=\cos x$, $t=\operatorname{tg}x$ тощо. Приклади.
- 11.Інтегрування найпростіших ірраціональностей.

Визначений інтеграл.

- 1.Задача про площу криволінійної трапеції.
- 2.Задача про роботу змінної сили.
- 3.Визначений інтеграл. Означення. Теорема існування. Геометричний та механічний зміст.
- 4.Властивості визначеного інтеграла (лінійність, адитивність, про знак інтеграла).
- 5.Теорема про середнє значення визначеного інтеграла.
- 6.Визначений інтеграл із змінною верхньою межею та його похідна.
- 7.Формула Ньютона-Лейбніца.
- 8.Обчислення площ фігур, що задані у декартових координатах або параметрично. Навести приклад.
- 9.Обчислення площ фігур у полярних координатах. Приклад.
- 10.Обчислення довжини дуги кривої, заданої параметрично, в декартових координатах, полярних координатах. Приклади.
- 11.Обчислення об'ємів тіл за площами паралельних перерізів. Об'єм тіла обертання. Приклади.
- 12.Обчислення площі поверхні тіл обертання.
- 13.Невласні інтеграли з нескінченними межами.
- 14.Невласні інтеграли від необмежених функцій.

Функції багатьох змінних

- 1.Означення функцій двох аргументів, способи задання, графічне зображення. Лінії рівня.
- 2.Частинні похідні, їх геометричний зміст.
- 3.Вираз повного приросту через частинні похідні.
- 4.Повний диференціал, його застосування у наближених обчисленнях.
- 5.Похідна складеної функції двох аргументів.
- 6.Неявні функції двох аргументів та їх похідні.
- 7.Дотична площина і нормаль до поверхні.
- 8.Геометричний зміст повного диференціала.
- 9.Екстремуми функції двох змінних. Необхідні і достатні умови екстремуму.
- 10.Скалярне поле. Похідна за напрямом. Градієнт.

Звичайні диференціальні рівняння

1. Означення диференціального рівняння. Порядок диференціального рівняння. Розв'язок диференціального рівняння.
2. Диференціальне рівняння першого порядку. Задача Коші. Означення загального та частинного розв'язків диференціального рівняння першого порядку.
3. Геометричний зміст диференціального рівняння першого порядку.
4. Диференціальне рівняння з відокремлюваними змінними та їх інтегрування.
5. Однорідні диференціальні рівняння першого порядку та їх інтегрування.

6. Лінійні диференціальні рівняння першого порядку та їх інтегрування. Геометричний та механічний зміст диференціальних рівнянь другого порядку. Задача Коші для диференціальних рівнянь другого порядку.
7. Диференціальні рівняння, які допускають зниження порядку.
8. Однорідні лінійні диференціальні рівняння другого порядку. Властивості розв'язків.
9. Теорема про структуру загального розв'язку лінійного однорідного диференціального рівняння другого порядку.
10. Теорема про структуру загального розв'язку лінійного неоднорідного диференціального рівняння другого порядку.
11. Лінійні однорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.
Загальний розв'язок у випадку, якщо корені характеристичного рівняння:
 - дійсні різні;
 - дійсні рівні;
 - комплексні.
12. Лінійні неоднорідні диференціальні рівняння другого порядку із сталими коефіцієнтами.
13. Добір частинних розв'язків за структурою правої частини у випадку коли права частина:
 - многочлен (або const);
 - експонента;
 - гармоніка.
14. Метод варіації довільних сталих.
15. Застосування диференціальних рівнянь до вивчення коливань:
 - а) вільні гармонічні коливання;
 - б) вимушені коливання, резонанс.
16. Системи диференціальних рівнянь. Нормальна система диференціальних рівнянь.
Задача Коші. Механічна інтерпретація нормальної системи трьох рівнянь.
17. Інтегрування нормальної системи рівнянь методом виключення змінної.

III семестр

Ряди

1. Означення ряду. Збіжні і розбіжні ряди. Сума ряду. Залишок ряду. Навести приклади збіжних і розбіжних рядів.

- 2.Ряд геометрична прогресія. Дослідити його на збіжність.
- 3.Необхідна ознака збіжності ряду. Довести її.
- 4.Ознаки порівняння. Довести.
- 5.Ознака Даламбера. Довести. Навести приклади застосування ознаки.
- 6.Інтегральна ознака Коші. Дослідити за допомогою інтегральної ознаки на збіжність узагальнений гармонічний ряд.
- 7.Знакопочережні ряди. Ознака Лейбніца. Довести.
- 8.Оцінка залишку знакопочережного ряду. Навести приклади.

9.Ознака абсолютної збіжності. Абсолютно і умовно збіжні ряди. Навести приклади.

10.Степеневий ряд. Теорема Абеля. Довести.

11.Радіус збіжності степеневого ряду. Область збіжності. Вивести формулу для обчислення радіуса збіжності.

12.Вивести ряд для функції

$$y = \ln \frac{1+x}{1-x}$$

13.Розклад в степеневий ряд функції $y = \arctg x$. Вивести.

14.Ряд Тейлора. Необхідна умова розкладу функції в ряд Тейлора. Достатні умови (сформулювати, пояснити).

15.Ряд Маклорена для функції $y = e^x$. Вивести, знайти область збіжності.

16. Ряд Маклорена для функції $y = \sin x$. Вивести, знайти область збіжності.

17.Степеневий ряд для функції $y = \cos x$. Вивести, знайти область збіжності.

18.Біноміальний ряд. Вивести. Область збіжності.

19..Застосування рядів до обчислення значень функцій, інтегралів та розв'язання диференціальних рівнянь (практично).

Кратні інтеграли

1.Задача про об'єм циліндричного бруса.

2.Подвійний інтеграл, його означення, геометричний зміст, властивості.

3.Обчислення подвійного інтеграла в декартовій системі координат. Приклад.

4.Обчислення подвійного інтеграла в полярних координатах. Приклад.

5.Задача про масу неоднорідного тіла. Потрійний інтеграл.

6.Обчислення потрійного інтеграла в декартових, циліндричних координатах (на прикладах).

7.Застосування кратних інтегралів до задач механіки (практично).

Криволінійні та поверхневі інтеграли з елементами векторного аналізу

1.Задача про масу матеріальної кривої. Криволінійний інтеграл по довжині дуги.

2.Обчислення криволінійного інтеграла першого роду (на прикладах).

3.Задача про роботу в силовому полі. Криволінійний інтеграл по координатах, його

властивості, обчислення. Формула Гріна.

4.Інтеграл по площі поверхні, означення, механічний зміст.

5.Обчислення поверхневого інтеграла першого роду.

6. Застосування поверхневих інтегралів до задач механіки (обчислення маси, координат центра мас, моментів інерції поверхні).
7. Поверхневий інтеграл по орієнтовній поверхні. Задача про потік вектора через поверхню.
8. Обчислення поверхневого інтеграла другого роду. Формула Остроградського - Гаусса.
9. Дивергенція векторного поля. Фізичний зміст дивергенції.
10. Ротор векторного поля. Формула Стокса. Фізичний зміст ротора.

Елементи теорії ймовірностей

1. Випадкові події (навести приклади). Ймовірність події.
2. Класичне означення ймовірності, його обмеженість. Статична ймовірність події.
3. Практично вірогідні і практично неможливі події. Принцип практичної впевненості.
4. Сума і добуток випадкових подій.
5. Теорема додавання для несумісних подій.
6. Умовна ймовірність. Теорема множення.
7. Теорема додавання для сумісних подій.
8. Формула повної ймовірності. Формула Байєса.
9. Формула Бернуллі. Найімовірніше число появи події.
10. Випадкова величина, означення, типи (навести приклади). Закон розподілу в.в.
11. Закон розподілу дискретної випадкової величини. Біноміальний розподіл.
12. Функція розподілу.
13. Ймовірність набування в.в. значень, що належать заданому інтервалу.
14. Щільність розподілу. Елемент ймовірності.
15. Вираз функції розподілу через щільність ймовірності.
16. Математичне сподівання та дисперсія в.в. Моменти випадкових величин.
17. Нормальний закон розподілу.
18. Числові характеристики нормального закону. Ймовірність попадання значень нормально розподіленої в.в. в інтервалах (α, β) . Правило "трьох сигм".

Ряди Фур'є

1. Ортогональні системи функцій. Ортогональність тригонометричної системи.
2. Ряди Фур'є. Вивід формул Ейлера-Фур'є.
3. Тригонометричний ряд Фур'є. Достатні умови розкладу функції в ряд Фур'є.
4. Ряд Фур'є для парних і непарних функцій.
5. Розклад функції в ряд Фур'є на $(-\ell, \ell)$.
6. Розклад функції в ряд Фур'є на $(0, \Pi)$, $(0, \ell)$.
7. Практичний гармонічний аналіз.
8. Комплексна форма ряду Фур'є.